GABLER EDITION WISSENSCHAFT

Andreas Bortfeldt, Jörg Homberger, Herbert Kopfer,
Giselher Pankratz, Reinhard Strangmeier (Eds.)

# Intelligent Decision Support

Current Challenges and Approaches

# Intelligente Entscheidungsunterstützung

Aktuelle Herausforderungen
und Lösungsansätze

Festschrift for/für Hermann Gehring

GABLER EDITION WISSENSCHAFT

Bibliographic information published by Die Deutsche Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data is available in the Internet at <http://dnb.d-nb.de>.

1st Edition 2008

*All rights reserved*
© Betriebswirtschaftlicher Verlag Dr. Th. Gabler | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2008

Editorial Office: Claudia Jeske

Gabler-Verlag is a company of Springer Science+Business Media.
www.gabler.de

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system or transmitted, mechanical, photocopying or otherwise without prior permission of the copyright holder.

Registered and/or industrial names, trade names, trade descriptions etc. cited in this publication are part of the law for trade-mark protection and may not be used free in any form or by any means even if this is not specifically marked.

Cover design: Regine Zimmer, Dipl.-Designerin, Frankfurt/Main
Printed on acid-free paper
Printed in Germany

ISBN 978-3-8349-0930-5

# Lineare Optimierung für ein Zuschnittproblem in der holzverarbeitenden Industrie – Ein Anwendungsbericht

Sören Koch, Sebastian König und Gerhard Wäscher

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Universitätsplatz 2, 39106 Magdeburg
soeren.koch@ww.uni-magdeburg.de, sebastiankoenig@gmx.de,
gerhard.waescher@ww.uni-magdeburg.de

**Abstract:** In this paper the authors present a case study from the wood-processing industry. It focuses on a cutting process in which material from stock is cut down in order to provide the items required by the customers in the desired qualities, sizes and quantities. In particular, two aspects make this cutting process special. Firstly, the cutting process is strongly interdependent with a preceding handling process, which, consequently, cannot be planned independently. Secondly, if the trim loss is of a certain minimum size, it can be returned into stock and used as input to subsequent cutting processes. In order to reduce the cost of the cutting process, a decision support tool has been developed which incorporates a linear programming model as a central feature. The model is described in detail, and experience from the application of the tool is reported.

**Keywords:** One-dimensional cutting, linear programming, wood-processing industry.

## 1 Einführung

Die Planung industrieller Zuschnittprozesse stellt ein klassisches Anwendungsfeld des Operations Research dar. Publikationen, die sich wissenschaftlich mit der Zuschnittplanung auseinander setzen (vgl. [4]), bzw. in denen über erfolgreiche Anwendungen berichtet wird (vgl. [3], [5], [8], [9]), finden sich bereits in den fünfziger Jahren des letzten Jahrhunderts. Man sollte deshalb meinen, Zuschnittprozesse gehörten zu den am besten untersuchten Produktionsprozessen schlechthin. Nichtsdestoweniger scheint die Anzahl der jährlichen Publikationen auf diesem Gebiet eher zu- als abzunehmen. Das liegt u.a. daran, dass die betreffenden Prozesse nach wie vor ein hohes Rationalisierungspotential aufweisen.

Zuschnittprobleme in der Praxis zeichnen sich oft durch sehr spezielle Gegebenheiten aus, für die keine Standardmodelle und -lösungsverfahren zur Verfügung stehen. Diese sind vielmehr erst in geeigneter Weise zu modifizieren oder sogar völlig neu zu entwickeln. Eine solche Anwendung aus der holzverarbeitenden Industrie wird im Folgenden vorgestellt. Das betreffende Zuschnittproblem weist dabei zwei Besonderheiten auf. Zum einen ist der Zuschnittprozess eng mit vorhergehenden Lager-

bzw. Transportprozessen verknüpft, die nicht sinnvoll aus der Planung ausgeklammert werden können. Zum anderen bildet der anfallende Verschnitt nicht automatisch Abfall, vielmehr können größere Verschnittstücke als Reststücke gelagert und zur Befriedigung von Kundenaufträgen in nachfolgenden Planungen als Einsatzmaterial erneut verplant werden.

Die Arbeit gliedert sich dementsprechend wie folgt: Im nachfolgenden Kapitel 2 wird zunächst das betreffende Unternehmen sowie die betrachtete Problemstellung vorgestellt. In Kapitel 3 erfolgt eine Analyse der Problemstellung vor allem im Hinblick auf die entscheidungsrelevanten Kosten und die Frage, inwieweit sich diese Kosten ermitteln lassen. In Kapitel 4 wird der Lösungsansatz sowie das hierfür entwickelte, zentrale Optimierungsmodell vorgestellt. Kapitel 5 enthält Informationen über die Implementierung des Lösungsansatzes. In Kapitel 6 wird dann kurz über Erfahrungen mit dem praktischen Einsatz des Entscheidungsunterstützungssystems berichtet sowie ein Ausblick auf geplante, zukünftige Weiterentwicklungen gegeben.

## 2 Problemstellung

Die Nordlam GmbH ist ein international tätiges, holzverarbeitendes Unternehmen, das am Standort Magdeburg Brettschichtholz in verschiedenen Größen und Qualitäten herstellt. Das sind sog. Leimbinder, die durch Verleimung von Holzlamellen erzeugt werden. Sie finden vor allem in Industriebauten (Lagerhallen, Fabrikgebäuden), zunehmend aber auch im privaten Hausbau Verwendung.

Ein eingehender Kundenauftrag wird zunächst dahingehend analysiert, ob ein Fertigungsauftrag ausgelöst werden muss oder ob er unmittelbar aus Warenbeständen erfüllt werden kann, die in einem Fertigwarenlager vorhanden sind. Tendenziell werden größere Aufträge eher direkt aus der Fertigung, kleinere Aufträge durch Zuschnitt von Leimbindern aus dem Lager befriedigt. Dieser zweite Fall bildet den Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Die Planung des Zuschnitts erfolgt produktgruppenbezogen und beginnt mit der Ermittlung, welche im Lager vorhandenen Leimbinder sich überhaupt zur Auftragserfüllung eignen. Dabei definiert sich eine Produktgruppe über Kriterien wie Breite, Höhe und Qualität (Industriequalität, Sichtqualität). Grundsätzlich stehen zwei Typen von Einsatzmaterial zur Verfügung, nämlich zum einen *Standardmaterial*, das eine Länge von 24 Metern aufweist und als sog. Überproduktion aus der Fertigung stammt, und zum anderen Reststücke, die als – hinreichend langer – Verschnitt in früheren Zuschnittprozessen angefallen sind. Anschließend wird der eigentliche Schnittplan festgelegt, der angibt, welche von den grundsätzlich geeigneten Leimbindern tatsächlich verwendet und wie sie zerlegt werden sollen.

Die für den Zuschnitt zu verwendenden Leimbinder werden nun nicht einzeln, sondern – gemeinsam mit Bindern anderer Qualitäten und Abmessungen – in Kassetten gelagert. Diese Kassetten müssen vom Lager zur Zuschnittabteilung und – nach Entnahme der benötigten Binder – zurück zum Lager transportiert werden, wo sie wieder einzulagern sind. Es kommt dabei häufig vor, dass die zur Befriedigung eines bestimmten Auftrags benötigten Leimbinder aus vielen verschiedenen Kassetten zu entnehmen sind.

Der Zuschnittprozess selbst kann als eindimensional (vgl. [2], [12]) charakterisiert werden. Die Einsatzmaterialien werden lediglich in einer Abmessungsdimension („Länge“) zurecht geschnitten, um daraus die zur Auftragsbefriedigung benötigten Kundenmaße zu erzeugen. Dabei anfallende Materialstücke, die keine Kundenmaße repräsentieren, werden als *Verschnitt* bezeichnet. „Hinreichend langer“ Verschnitt kann wieder eingelagert und in späteren Zuschnittprozessen erneut als Einsatzmaterial (dann als *Reststücke* bezeichnet) verwendet werden. Daraus erklärt sich, dass die im Fertigwarenlager vorhandenen Leimbinder sehr viele verschiedene Längen aufweisen. Verschnittstücke, die zu kurz für eine weitere Verwendung sind, stellen *Abfall* dar.

Die Geschäftsleitung der Nordlam GmbH sah die aktuelle Planung und Durchführung der Zuschnittprozesse als unzureichend an. Insbesondere wurden hohe Kosten der Planung und hohe Abfallkosten bemängelt. Bisher erfolgte die Planung des Zuschnitts weitgehend manuell. Für jeden Arbeitstag legte ein Mitarbeiter („der Planer“) – mit einem zeitlichen Vorlauf von etwa drei Tagen – fest, welche Kundenaufträge an dem betreffenden Tag produziert, welche Materialien eingesetzt und welche Schnittpläne angewendet werden sollten. Er benötigte hierfür nahezu einen vollständigen Arbeitstag. Der in den Zuschnittprozessen erzeugte Abfall lag bei etwa fünf Prozent des Materialverbrauchs, während vergleichbare Wettbewerber mit lediglich zwei Prozent Abfall auskamen. Dabei entspricht ein Prozent Abfall einem Materialwert von etwa 45.000 Euro pro Jahr. In einer Studie, mit denen die Verfasser betraut wurden, sollte deshalb ein Entscheidungsunterstützungssystem für die Zuschnittplanung entwickelt und dessen Auswirkungen auf die Kosten untersucht werden.

# 3 Problemanalyse

## 3.1 Ziele der Zuschnittplanung

Grundsätzlich wird angestrebt, alle Kundenaufträge exakt zu erfüllen und die zugehörigen, mit der Entscheidung über die Schnittpläne im Zusammenhang stehenden Kosten zu minimieren.

Zu den so definierten entscheidungsrelevanten Kosten des Zuschnitts gehören zunächst die *Kosten des Materialverbrauchs*. Ein Verbrauch entsteht in dem Umfang, wie Kundenmaße und Abfall entstehen. Die Kosten des Materialverbrauchs für die Kundenmaße bilden eine Konstante, da die Kundenbedarfe exakt zu erfüllen sind. Insofern betreffen die entscheidungsrelevanten Materialverbrauchskosten ausschließlich den als Abfall einzustufenden Verschnitt. Diese Kosten können als proportional zur Abfallmenge angesehen werden. Die Höhe der Kosten pro Längeneinheit des Einsatzmaterials sind bekannt.

Allerdings machen die Abfallkosten nur einen Teil der entscheidungsrelevanten Kosten aus. Zu diesen gehören ebenfalls *Transport-* und *Handlingkosten*, die durch das Herausziehen der benötigten Kassetten aus den jeweiligen Lagerfächern, den Transport vom Lager zum Zuschnittbereich und zurück sowie die erneute Einlagerung verursacht werden (im Folgenden unter dem Begriff „Handlingkosten“ zusammen gefasst). Diese Kosten können als proportional zu der Anzahl der zur Befriedigung

eines Auftrags benötigten Kassetten angenommen werden. Die auf eine Kassettenbewegung entfallenden Kosten sind bekannt.

In Bezug auf die Reststücke, die in das Lager zurückgehen, entstehen Handlingkosten, aber auch zusätzliche *Lagerkosten*. Letztere beinhalten vor allem kalkulatorische Zinsen auf das im Lagerbestand gebundene Kapital. Sie können als proportional zur Lagermenge der betreffenden Materialqualität und zur Lagerdauer angenommen werden. Letztere kann aber nicht angegeben werden, da sie davon abhängt, ob und wann in der Zukunft ein geeigneter Kundenauftrag eingeht, der die Verwendung des betreffenden Reststücks nahe legt. Deshalb wird – als Hilfsziel – grundsätzlich eine Minimierung der in den neu gebildeten Reststücken gebundenen Materialmenge angestrebt.

### 3.2 Zielbeziehungen

Da es wegen der mangelnden Quantifizierbarkeit der Lagerkosten nicht möglich ist, alle relevanten Kostenbestandteile in einer einzigen Zielfunktion zu erfassen, stellt sich die Frage, wie sich eine Minimierung der Summe aus Handling- und Materialverbrauchskosten auf die Reststückbildung und ggf. auf andere damit im Zusammenhang stehende Kosteneinflussgrößen auswirkt. Dabei sind vor allem die Auswirkungen auf den Einsatz von Standardmaterial zu beachten.

Geringe Abfallmengen (und damit geringe Materialverbrauchskosten) lassen sich tendenziell dadurch erzielen, dass Schnittmuster mit Abfall durch solche ersetzt werden, die eine Reststückbildung vorsehen. Dies befördert eher den Einsatz von langem Standardmaterial als den von kürzeren Reststücken aus früheren Zuschnittprozessen. Niedrige Handlingkosten lassen sich durch wenige Kassettenbewegungen erreichen. Dadurch wird ebenfalls der Einsatz von Standardmaterialien bevorzugt, von denen sich – im Gegensatz zu Reststücken aus früheren Zuschnittprozessen – häufig mehrere in einer Kassette befinden.

Weder der Einsatz von Standardmaterial noch die Bildung neuer Reststücke ist aber sonderlich wünschenswert. Durch den vermehrten Einsatz von Standardmaterial findet ein Abbau der betreffenden Lagerbestände statt, wodurch tendenziell die Möglichkeiten zu einer guten Materialausnutzung in der Zukunft beeinträchtigt werden. Reststücke verursachen zusätzliche, aber unbestimmte Lagerkosten, wobei nicht einmal klar ist, ob tatsächlich später eine gute Materialausnutzung garantiert ist.

Als Konsequenz für das zu entwickelnde Entscheidungsunterstützungssystem ergab sich daraus, dass eine Steuerung in Bezug auf den Einsatz von Standardmaterial und die Bildung von Reststücken möglich sein muss.

### 3.3 Problemtyp

Das Einsatzmaterial besteht aus Stücken, die viele voneinander verschiedene Längen besitzen. Lediglich das Standardmaterial weist identische Längen (24 m) auf. Von diesem sollen aber – aus den geschilderten Gründen – nur geringe Mengen eingesetzt werden. Auch in Bezug auf die Kundenaufträge lassen sich vergleichsweise geringe Nachfragehäufigkeiten für die einzelnen Kundenmaße feststellen. Die konkreten Aus-

prägungen des geschilderten Zuschnittproblems sind dementsprechend gemäß der von Wäscher, Haußner und Schumann [12] vorgeschlagenen Typologie von Zuschnitt- und Packproblemen als „Residual Bin-Packing Problems“ (RBPP) bzw. als „Residual Cutting Stock Problems“ (RCSP) zu charakterisieren. In Bezug auf diese Problemtypen liegt aber insofern eine Erweiterung vor, wie der vorgelagerte Transport- bzw. Handlingprozess sowie die Bildung von (neuen) Reststücken bei der Planung des Schnittplans mit zu berücksichtigen sind. Vergleichbare Problemstellungen der Zuschnittplanung mit (wieder) verwendbaren Reststücken wurden bereits von Cherri, Arenales und Yanasse [1], Gradisar und Trkman [7], Gradisar, Resinovic und Kljajic [6], Trkman und Gradisar [11] und Scheithauer [10] behandelt. Allerdings ist den Verfassern dieser Arbeit bislang keine Veröffentlichung bekannt, in der Transport- und Handlingprozesse der hier geschilderten Art explizit in die Zuschnittplanung einbezogen werden.

# 4 Modell und Lösungsansatz

## 4.1 Grundlegender Aufbau

Für die dargestellte Problemstellung wurde ein Lösungsansatz auf der Grundlage eines linearen Optimierungsmodells entwickelt und implementiert. Dieser Lösungsansatz enthält zwei Komponenten, die den Eingriff des Planers bzw. dessen Entscheidung erfordern. Zum einen obliegt es ihm festzulegen, was in Bezug auf eine bestimmte Produktgruppe maximal als Abfall zugelassen werden soll. Die Festlegung hängt vor allem davon ab, was über einen absehbaren Zeitraum als kleinste Auftragslänge auftreten wird. Alle kürzeren Verschnittlängen sind grundsätzlich Abfall. Der Planer hat typischerweise eine konkrete Vorstellung davon, wie diese maximale Abfalllänge aussieht. Eingehende Aufträge mit kürzeren Auftragslängen bzw. das Ausbleiben von Aufträgen mit kurzen Längen über einen längeren Zeitraum verändern diese Vorstellung.

Entsprechendes gilt in Bezug auf die Reststücklängen. Grundsätzlich werden nur solche Längen als Reststücke zugelassen, von denen erwartet wird, dass sie sich in Zukunft „gut verwenden“ lassen. Das führt zunächst zu einer Untergrenze für die zulässige Reststücklänge. Zusätzlich wird eine Obergrenze für die zulässigen Reststücklängen definiert. Diese ist notwendig, um in jedem Fall auszuschließen, dass von langen Einsatzstücken bzw. von Standardlängen nur kurze Stücke abgeschnitten werden.

Aus diesen Angaben über die zulässigen Verschnitt- und Reststücklängen sowie den zugehörigen Auftrags- und Einsatzmaterialdaten wird das im folgenden Abschnitt 4.2 dargestellte lineare Optimierungssystem generiert. Zu beachten ist, dass das Optimierungssystem wiederholt für unterschiedliche Vorgaben zum Einsatz von Standardmaterial gelöst wird. Dabei wird die Anzahl der maximal einsetzbaren Standardmaterialstücke von einer oberen Schranke her sukzessiv bis auf Null abgesenkt. Die zugehörigen Schnittpläne erhält der Planer mit entsprechenden Angaben über die jeweiligen Ausprägungen der Zielgrößen zur Auswahl vorgelegt.

## 4.2 Modell

### 4.2.1 Indexmengen, Konstanten, Parameter, Variablen

**Indexmengen**

$I$: Indexmenge der Auftragsstücktypen ($I = \{1, 2,\ldots, \mathrm{m}\}$);

$J$: Indexmenge der Einsatzmaterialtypen, bestehend aus dem Standardmaterialtyp ($\mathrm{j} = 0$) und den Lagermaterialtypen ($\mathrm{j} = 1, 2,..., \mathrm{n}$), d.h. $J = \{0, 1, 2,..., \mathrm{n}\}$.

Alle betrachteten Einsatzmaterialtypen sind qualitätsmäßig zur Erfüllung eines bestimmten Auftrags geeignet, und unterscheiden sich lediglich nach ihren jeweiligen Längen. Sie treten üblicherweise in verschiedenen Kassetten auf.

$K$: Indexmenge der Kassettennummern;

$P(\mathrm{j})$: Indexmenge aller zulässigen Schnittmuster, die auf den Einsatzmaterialtyp $\mathrm{j}$ ($\mathrm{j} \in J$) angewendet werden können.

**Konstanten**

$\mathrm{a_{ijp}}$: Häufigkeit, mit der der Auftragsstücktyp $\mathrm{i}$ ($\mathrm{i} \in I$) im Schnittmuster $\mathrm{p}$ ($\mathrm{p} \in P(\mathrm{j})$) für den Einsatzmaterialtyp $\mathrm{j}$ ($\mathrm{j} \in J$) enthalten ist;

$\mathrm{c^{hand}}$: Handlingkosten pro Kassette;

$\mathrm{c^{abf}}$: Abfallkosten pro Längeneinheit des Einsatzmaterials;

$\mathrm{c_{jp}^{abf}}$: Abfallkosten, die von dem auf den Einsatzmaterialtyp $\mathrm{j}$ ($\mathrm{j} \in J$) angewendeten Schnittmuster $\mathrm{p}$ ($\mathrm{p} \in P(\mathrm{j})$) verursacht werden,

$$\mathrm{c_{jp}^{abf}} = \begin{cases} \mathrm{c^{abf}} \cdot \left( \mathrm{L_j} - \sum\limits_{\mathrm{i} \in I} \mathrm{l_i a_{ijp}} \right), & \text{wenn Schnittmuster p ein zulässiges Abfallstück (vgl. (1)) enthält,} \\ 0, & \text{sonst;} \end{cases}$$

$\mathrm{d_i}$: Bedarf an bzw. (Kunden-) Nachfrage nach Auftragsstücktyp $\mathrm{i}$ ($\mathrm{i} \in I$);

$\mathrm{l_i}$: Länge des Auftragsstücktyps $\mathrm{i}$ ($\mathrm{i} \in I$);

$\mathrm{s_{jk}}$: Vorrat an Einsatzmaterialtyp $\mathrm{j}$ ($\mathrm{j} \in J$), der in Kassette $\mathrm{k}$ ($\mathrm{k} \in K$) vorhanden ist;

$\mathrm{t_{jp}}$: Länge des Verschnitts, wenn das Schnittmuster $\mathrm{p}$ ($\mathrm{p} \in P(\mathrm{j})$) auf den Einsatzmaterialtyp $\mathrm{j}$ ($\mathrm{j} \in J$) angewendet wird; Länge des Einsatzmaterialtyps j, die – bei Anwendung des Schnittmusters $\mathrm{p}$ – nicht von Auftragsstücktypen bedeckt ist;

$\mathrm{L_j}$: Länge des Einsatzmaterialtyps $\mathrm{j}$ ($\mathrm{j} \in J$);

$\mathrm{M_k}$: hinreichend große, auf die Kassette $\mathrm{k}$ bezogene Zahl (kann gleich der Anzahl der Objekte in Kassette $\mathrm{k}$ ($\mathrm{k} \in K$) gesetzt werden).

**Variablen**

$\mathrm{w_{jpk}}$: Häufigkeit, mit der Schnittmuster $\mathrm{p}$ ($\mathrm{p} \in P(\mathrm{j})$) auf Einsatzmaterialtyp $\mathrm{j}$ ($\mathrm{j} \in J$) aus der Kassette $\mathrm{k}$ ($\mathrm{k} \in K$) angewendet wird;

$x_{jp}$: Häufigkeit, mit der Schnittmuster $p$ ($p \in P(j)$) auf den Einsatzmaterialtyp $j$ ($j \in J$) angewendet wird;

$y_k$: Variable, die anzeigt, ob ein Einsatzmaterialstück aus Kassette $k$ ($k \in K$) benötigt wird,

$$y_k = \begin{cases} 1, & \text{wenn mind. ein Einsatzmaterialstück aus Kassette k benötigt wird,} \\ 0, & \text{sonst;} \end{cases}$$

$z_k$: Anzahl der Einsatzmaterialstücke, die aus der Kassette $k$ ($k \in K$) insgesamt benötigt werden.

**Parameter**

ALMAX: Obergrenze für die Länge des Verschnitts, der in einem Schnittmuster noch als Abfall akzeptiert wird (maximale Abfalllänge);

RLMIN: Untergrenze für die Länge des Verschnitts, der in einem Schnittmuster als Reststück akzeptiert wird (minimale Reststücklänge);

RLMAX: Obergrenze für die Länge des Verschnitts, der in einem Schnittmuster als Reststück akzeptiert wird (maximale Reststücklänge);

SNMAX: maximale Anzahl von Standardmaterialstücken, die in der Lösung akzeptiert werden.

Zur Vermeidung von Reststücklängen, die später sehr schlecht weiter zu verwenden sind, muss RLMIN dabei nicht zwingend mit ALMAX zusammenfallen.

### 4.2.2 Schnittmuster

Ein Schnittmuster $p$ ($p \in P(j)$) für den Einsatzmaterialtyp $j$ ($j \in J$) ist ein Vektor

$$a_{jp} := (a_{1jp}, a_{2jp}, \ldots, a_{mjp}),$$

der die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\sum_{i \in I} l_i a_{ijp} + t_{jp} = L_j, \qquad j \in J, p \in P(j);$$

$$\sum_{i \in I} a_{ijp} \geq 1, \qquad j \in J, p \in P(j);$$

$$a_{ijp} \geq 0 \text{ und ganzzahlig}, \qquad i \in I, j \in J, p \in P(j);$$

$$t_{jp} \geq 0, \qquad j \in J, p \in P(j).$$

Ein Schnittmuster heiße *zulässig*, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- die Auftragsstücke nutzen die Länge $L_j$ des Einsatzmaterialtyps vollständig aus, d.h.

  $$t_{jp} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i \in I} l_i a_{ijp} = L_j,$$

- der Verschnitt ist klein genug, um noch als Abfall akzeptiert zu werden, d.h.
  $$0 < \mathrm{t_{jp}} = \mathrm{L_j} - \sum_{\mathrm{i} \in I} \mathrm{l_i a_{ijp}} \leq \mathrm{ALMAX}, \tag{1}$$
- der Verschnitt ist von einer Länge, die als akzeptabel für ein Reststück angesehen wird:
  $$\mathrm{RLMIN} \leq \mathrm{t_{jp}} = \mathrm{L_j} - \sum_{\mathrm{i} \in I} \mathrm{l_i a_{ijp}} \leq \mathrm{RLMAX}.$$

### 4.2.3 Optimierungssystem

Unter Verwendung der so definierten Symbole lässt sich das folgende Optimierungsproblem formulieren:

$$\min \sum_{\mathrm{j} \in J} \sum_{\mathrm{p} \in P(\mathrm{j})} \mathrm{c_{jp}^{abf}} \cdot \mathrm{x_{jp}} + \sum_{\mathrm{k} \in K} \mathrm{c^{hand}} \cdot \mathrm{y_k} \tag{2}$$

$$\sum_{\mathrm{j} \in J} \left( \sum_{\mathrm{p} \in P(\mathrm{j})} \mathrm{a_{ijp}} \cdot \mathrm{x_{jp}} \right) = \mathrm{d_i}, \qquad \mathrm{i} \in I; \tag{3}$$

$$\mathrm{x_{jp}} - \sum_{\mathrm{k} \in K} \mathrm{w_{jpk}} = 0, \qquad \mathrm{j} \in J, \mathrm{p} \in P(\mathrm{j}); \tag{4}$$

$$\sum_{\mathrm{p} \in P(\mathrm{j})} \mathrm{w_{jpk}} \leq \mathrm{s_{jk}}, \qquad \mathrm{j} \in J, \mathrm{k} \in K; \tag{5}$$

$$\sum_{\mathrm{p} \in P(0)} \mathrm{x_{0p}} \leq \mathrm{SNMAX}; \tag{6}$$

$$\sum_{\mathrm{j} \in J} \sum_{\mathrm{p} \in P(\mathrm{j})} \mathrm{w_{jpk}} - \mathrm{z_k} = 0, \qquad \mathrm{k} \in K; \tag{7}$$

$$-\mathrm{M_k} \cdot \mathrm{y_k} + \mathrm{z_k} \leq 0, \qquad \mathrm{k} \in K; \tag{8}$$

$$\mathrm{x_{jp}} \geq 0 \text{ und ganzzahlig}, \qquad \mathrm{j} \in J, \mathrm{p} \in P(\mathrm{j}); \tag{9}$$

$$\mathrm{y_k} \in \{0,1\}, \qquad \mathrm{k} \in K; \tag{10}$$

$$\mathrm{w_{jpk}} \geq 0 \text{ und ganzzahlig}, \qquad \mathrm{j} \in J, \mathrm{p} \in P(\mathrm{j}), \mathrm{k} \in K; \tag{11}$$

$$\mathrm{z_k} \geq 0 \text{ und ganzzahlig}, \qquad \mathrm{k} \in K; \tag{12}$$

In der Zielfunktion (2) werden die entscheidungsrelevanten Abfall- und Handlingkosten erfasst. Die Restriktionen des Typs (3) sind als Bedarfsrestriktionen zu charakterisieren. Sie gewährleisten, dass eine Lösung generiert wird, die sämtliche Kundenbedarfe erfüllt. Durch (4) ist für jedes Schnittmuster eine Bilanzgleichung gegeben, mit welcher der Zusammenhang hergestellt wird zwischen der Häufigkeit, mit der ein Schnittmuster insgesamt angewendet wird und wie oft es in Bezug auf die entsprechenden Einsatzmaterialien in den einzelnen Kassetten eingesetzt wird. Restriktionen vom Typ (5) repräsentieren Vorratsrestriktionen. Sie drücken die Beschränktheit der

Verfügbarkeit der Einsatzmaterialtypen in den einzelnen Kassetten aus. (6) ist eine Restriktion, die den Einsatz der Standardmaterialstücke steuern soll. Die maximal zulässige Anzahl von Standardeinsatzmaterialstücken SNMAX ist dabei als ein Parameter anzusehen, der mit SNMAX $=\sum_{k\in K} s_{0k}$ initialisiert und dann sukzessive auf Null abgesenkt wird. Die Restriktionen vom Typ (7) dienen der Berechnung der Anzahl von Einsatzmaterialstücken, die aus den einzelnen Kassetten jeweils benötigt werden. Ist diese Anzahl größer als Null, so werden aufgrund von (8) und den Binärbedingungen (10) Handlingkosten in die Berechnung des Zielwerts der betreffenden Lösung einbezogen.

## 5 Implementierung

Der skizzierte Lösungsansatz wurde als eigenständige Anwendung auf PC-Basis unter Windows realisiert. Die für die Optimierung benötigten Daten werden zu Beginn der Planung direkt aus der Datenbank des Unternehmens eingelesen. Hierzu gehören der Kundenbedarf, der Lagerbestand sowie die zugehörigen Kassettennummern. Tab. 1 zeigt einen typischen Datensatzsatz für eine ausgewählte Produktgruppe aus dem Monat Oktober 2007.

**Tab. 1.** Datensatz der Produktgruppe „140 x 240 Sichtqualität“.

| Kundenbedarf | Lagerbestand | Kassettennr. |
|---|---|---|
| 1 x 3330 mm | 1 x 3644 mm | 961 |
| 2 x 9200 mm | 1 x 4036 mm | 246 |
| 1 x 9600 mm | 1 x 4468 mm | 206 |
| 2 x 10100 mm | 2 x 4500 mm | 986 |
| 1 x 11250 mm | 1 x 4536 mm | 961 |
| 3 x 12600 mm | 1 x 5120 mm | 246 |
| | 1 x 5344 mm | 595 |
| | 2 x 6000 mm | 246 |
| | 1 x 9652 mm | 986 |
| | 1 x 10052 mm | 986 |
| | 1 x 10284 mm | 206 |
| | 1 x 13744 mm | 206 |
| | 1 x 15032 mm | 206 |
| | 1 x 15444 mm | 33 |
| | 1 x 21060 mm | 986 |
| | 1 x 24060 mm | 206 |
| | 1 x 24060 mm | 961 |
| | 1 x 24060 mm | 986 |
| | 7 x 24060 mm | 33 |

Zusätzlich zu den angegebenen Grunddaten kann der Planer – sofern er das für erforderlich hält – für jede Produktgruppe weitere spezifische Parameter festlegen. Dies sind zum einen die jeweiligen Kosten pro Längeneinheit des Abfalls und zum anderen die zulässigen Verschnittintervalle. Hierfür sind in dem implementierten Entscheidungsunterstützungssystem Eingabefenster vorgesehen, in denen er die entsprechen-

den Eintragungen vornehmen kann. Abb. 1 (Angaben dort ebenfalls in mm) zeigt beispielhaft die Eingabemaske für die zulässigen Reststücklängen. Ausgewiesen wird darin, dass ein Verschnitt von 4 m bis 20 m zur Reststückbildung erlaubt ist. Voreingestellt ist außerdem, dass eine Verschnittlänge von weniger als 2 m Abfall darstellt. Insofern sind Verschnittlängen zwischen 2 m und 4 m und von mehr als 20 m ausgeschlossen.

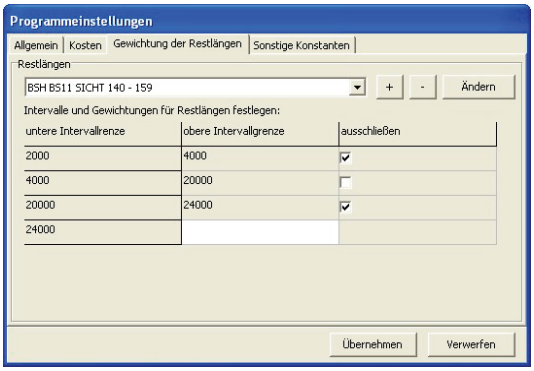


**Abb. 1.** Vorgaben für die zulässigen Verschnittintervalle.

Aus den produktgruppenbezogenen Daten wird durch ein selbstgeschriebenes Programm das zugehörige konkrete Optimierungsmodell ((2) – (12)) automatisch generiert. Die Durchführung der Optimierungsrechnungen erfolgt unter Einsatz von kommerzieller LP-Software. Als Ergebnis erhält der Planer eine Übersicht über die Lösungen (Schnittpläne) angezeigt (s. Abb. 2), die für die verschiedenen Vorgaben für die Anzahl maximal einsetzbarer Standardmaterialstücke berechnet wurden. Die Angaben über die jeweilige Summe aus Abfall- und Handlingkosten einerseits und über die neu gebildete Reststückmenge (Gesamtlänge aller neu gebildeten Reststücke in mm) andererseits machen den bereichsweisen „Trade-off“ zwischen diesen beiden Zielgrößen deutlich. Darüber hinaus werden für jede Lösung weitere für den Planer bedeutsame, den jeweiligen Schnittplan charakterisierende Angaben aufgeführt. Dazu gehören die betreffende gesamte Abfallmenge (in mm), die Anzahl der erforderlichen Kassettenbewegungen und die Anzahl der eingesetzten Leimbinder (Einsatzmaterialstücke).

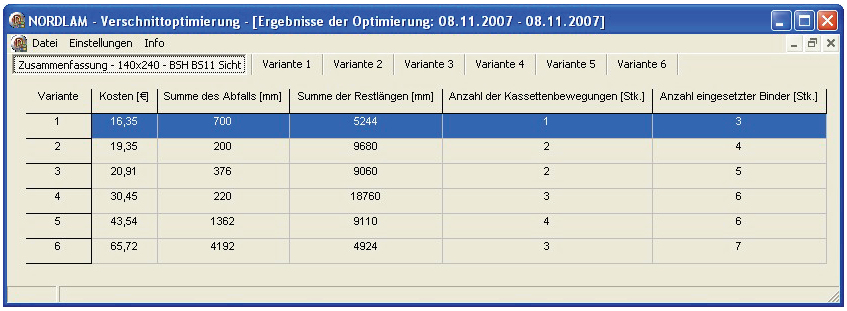


**Abb. 2.** Übersicht über die berechneten Lösungen.

Aus den so dargestellten Lösungen hat der Planer eine zur Realisierung auszuwählen. Bei Bedarf kann er sich auch die jeweiligen, zu den einzelnen Lösungen gehörenden Schnittpläne detailiert ansehen. Abb. 3 zeigt einen solchen Schnittplan mit der expliziten Aufstellung von Abfall- und Handlingkosten. Für Vergleichszwecke wird dem Planer jeweils auch der prozentuale Abfallanteil angegeben.

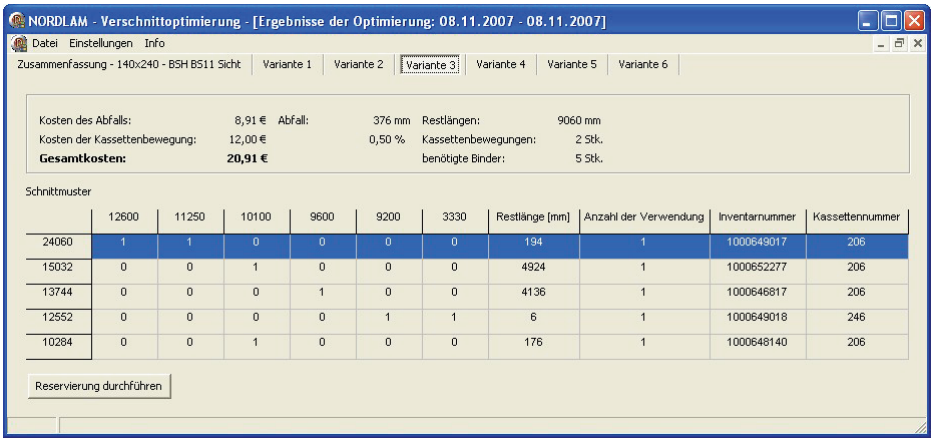


**Abb. 3.** Schnittplan in Detaildarstellung.

Über den Button „Reservierung durchführen“ kann der Planer den Schnittplan endgültig auswählen. Die entsprechenden Leimbinder werden dadurch im ERP- System dem zugehörigen Kundenauftrag fest zugeordnet und die Schnittpläne werden an die Mitarbeiter der Zuschnittabteilung übermittelt.

## 6 Erfahrungen im praktischen Einsatz und Ausblick

Das beschriebene Entscheidungsunterstützungssystem befindet sich seit Kurzem im Testbetrieb. Die Akzeptanz durch den Planer ist gegenwärtig schon hoch, was u.a. darauf zurück geführt werden kann, dass ihm das System schon in der Erprobungsphase immer wieder Schnittpläne bereit stellt, die er gegenüber seinen eigenen, manuell (aber mit großer Praxiserfahrung) ermittelten Lösungen als überlegen erkennt. Außerdem erfolgt die Bereitstellung der Lösungsvorschläge durch das Entscheidungsunterstützungssystem ohne Zeitverzögerung in Echtzeit. Tab. 2 belegt das anhand eines Ausschnitts aus dem Auftragsbestand eines bestimmten Arbeitstages. Die Datensätze sind zunächst der Anzahl der bereitzustellenden Auftragsstücke und nach der Anzahl der im Lager vorhandenen, potentiellen Einsatzmaterialstücke charakterisiert. Zur Beschreibung der Größe des jeweiligen Optimierungsmodells ((2)-(12)) ist außerdem die betreffende Schnittmusteranzahl aufgeführt. Schließlich ist die Rechenzeit angegeben, die zur Bereitstellung der Lösungsübersicht gem. Abb. 2 benötigt wurde. Sie umfasst sowohl die Zeiten zur Modellgenerierung als auch die Zeiten zur Ausführung der Optimierungsrechnungen für alle relevanten Werte des Parameters SNMAX. Alle Berechnungen wurden auf einem Arbeitsplatzrechner mit Intel P4

Mobile Prozessor (3,2 GHz) durchgeführt. Es wird deutlich, dass selbst für die größeren Probleminstanzen keine signifikanten Wartezeiten bis zur Bereitstellung der Lösungsvorschläge entstehen.

**Tab. 2.** Auftragsbestand.

| Produktgruppe | Anzahl nachgefragter Binder (Auftragsstücke) | Anzahl der im Lager vorhandenen Binder (Einsatzmaterialstücke) | Anzahl Schnittmuster | Rechenzeit Optimierung [sec.] |
|---|---|---|---|---|
| 80 x 200 | 10 | 83 | 28 | 8,54 |
| 80 x 220 | 6 | 30 | 59 | 3,71 |
| 100 x 120 | 11 | 65 | 34 | 9,09 |
| 120 x 120 | 3 | 22 | 289 | 4,82 |
| 120 x 320 | 6 | 29 | 112 | 2,71 |
| 140 x 200 | 10 | 35 | 36 | 3,36 |
| 140 x 240 | 7 | 30 | 153 | 2,96 |
| 160 x 240 | 11 | 29 | 48 | 4,97 |
| 160 x 280 | 5 | 26 | 55 | 1,26 |
| 200 x 240 | 5 | 32 | 113 | 3,43 |
| 200 x 400 | 5 | 33 | 36 | 1,44 |
| 200 x 520 | 4 | 25 | 66 | 1,59 |

Auch aus betriebswirtschaftlicher Sicht sind die Erfahrungen bisher außerordentlich positiv. Schon mit der Vorabversion des Entscheidungsunterstützungssystems konnte der Materialabfall um einen Prozentpunkt gesenkt werden. Die Zeit, die der Planer zur Erstellung der täglichen Schnittpläne benötigt, wird sich nach vollständiger Implementierung von acht auf ca. vier Stunden reduzieren.

Es soll aber auch nicht verschwiegen werden, dass ein Datensatz aufgetreten ist, für den das Modell nicht generiert werden konnte, da es zu viele Schnittmuster enthielt. Das Vorkommen solcher „pathologischer“ Datensätze ist den auf dem Gebiet der Zuschnittplanung tätigen Wissenschaftlern und Praktikern grundsätzlich bekannt. Allerdings wurde dieser Aspekt im Hinblick auf die hier analysierte Anwendung bzw. die vorgefundenen Datenstrukturen zunächst als nicht besonders relevant angesehen. Tatsächlich ist innerhalb von sechs Monaten kein weiterer Datensatz dieser Art vorgekommen. Nichtsdestoweniger wird hier aber doch eine Schwachstelle des Systems deutlich. Gegenwärtig ist noch vorgesehen, dass der Planer in einem solchen Fall zur manuellen Planung zurückkehrt. In Zukunft soll dann ein Spaltengenerierungsverfahren entwickelt werden, das auf eine explizite Generierung sämtlicher Schnittmuster verzichtet.

## Literaturverzeichnis

1. Cherri, A.; Arenales, M.; Yanasse, H.: The Unidimensional Cutting Stock Problem with Usable Leftover – A Heuristic Approach. Working Paper No. 90, Serie Computacao (2007), Universidade de Sao Paulo.
2. Dyckhoff, H.: A Typology of Cutting and Packing Problems. In: European Journal of Operations Research 44 (1990), 145-159.

3. Eilon, S.: Optimizing the Shearing of Steel Bars. In: Journal of Mechanical Engineering Science 2 (1960), 129-142.
4. Eisemann, K.: The Trim Problem. In: Management Science 3 (1957), 279-284.
5. Förstner, K.: Zur Lösung von Entscheidungsaufgaben bei der Papierherstellung. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaftslehre 29 (1959). 693-703, 756-765.
6. Gradisar, M.; Resinovic, G.; Kljajic, M.:A Hybrid Approach for Optimization of One-Dimensional Cutting. In: European Journal of Operations Research 119 (1999), 719-728.
7. Gradisar, M.; Trkman, P.: A Combined Approach to the Solution to the General One-Dimensional Cutting Stock Problem. In: Computers & Operations Research 32 (2005), 1793-1807.
8. Paull, A. E.: Linear Programming: A Key to Optimum Newsprint Production. In: Pulp and Paper Magazine of Canada 57 (1956), 146-150.
9. Paull, A. E.; Walter, J. R.: The Trim Problem: An Application of Linear Programming to the Manufacture of Newsprint Paper (Abstract). In: Econometrica 23 (1955), 336.
10. Scheithauer, G.: A Note on Handling Residual Lengths. In: Optimization 22 (1991), 461-466.
11. Trkman, P.; Gradisar, M.: One-Dimensional Cutting Stock Optimization in Consecutive Time Periods. In: European Journal of Operations Research 179 (2007), 291-301.
12. Wäscher, G.; Haußner, H.; Schumann, H.: An Improved Typology of Cutting and Packing Problems. In: European Journal of Operational Research 183 (2007), 1109-1130.